

Analisi II - Ingegneria Gestionale - 6 crediti

Marco G. Ghimenti

a.a 2012-2013

1 Finalità del corso

Il corso si propone di insegnare a padroneggiare un formalismo matematico avanzato e le principali tecniche di calcolo in più variabili, sia in spazi euclidei che in su curve e superfici, necessarie a intraprendere lo studio di altre discipline scientifiche senza trovare difficoltà nella comprensione della parte matematica.

Il corso è approssimativamente diviso in due metà: calcolo infinitesimale e differenziale, e calcolo integrale e campi di vettori. In entrambe le parti si partirà dai concetti elementari per arrivare ad una trattazione approfondita degli argomenti. Particolare attenzione verrà data ai problemi di ottimizzazione.

Le lezioni verranno integrate da numerosi esercizi e da alcuni argomenti di complemento su generalizzazioni astratte delle teorie presentate.

2 Prerequisiti

Una buona conoscenza dell'Analisi I, in particolare una comprensione approfondita dei principali concetti del calcolo: limite, derivata, differenziale, anche a livello astratto. Una padronanza di alcuni concetti di Algebra Lineare, in particolare la teoria degli spazi vettoriali. Dimestichezza con il linguaggio matematico e capacità di formalizzazione.

3 Programma

Strumenti geometrici: Richiami di geometria: punti, vettori e vettori applicati in uno spazio euclideo. \mathbb{R}^n come spazio vettoriale. Cenni sugli spazi vettoriali astratti. Coordinate, prodotti scalari, norma e distanza. Spazi normati e metrici. Ortogonalizzazione di Gram Schmidt (con dimostrazione). Cenni sui coefficienti di Fourier. Rette e piani nello spazio: forma vettoriale e cartesiana. Topologia e Spazi metrici: punti esterni, interni e di frontiera di un sottoinsieme di uno spazio euclideo. Insiemi aperti e chiusi di uno spazio euclideo e loro proprietà. Insiemi chiusi per successioni. Insiemi compatti. Compatti di \mathbb{R}^n .

Calcolo infinitesimale e differenziale Definizione di limite di una funzione a più variabili (per successioni e con il formalismo ε - δ). Limiti e coordinate polari. Continuità. Teoremi del calcolo che si generalizzano a più variabili in maniera banale (proprietà dei limiti, permanenza del

segno, confronto, continuità delle funzioni elementari). Teorema di Weierstrass in più variabili (con dimostrazione). Derivata parziale e derivata direzionale. Differenziale. Vettore gradiente. Rapporto tra continuità, differenziabilità e derivabilità. Differenziale di funzione di due variabili e piano tangente al grafico. Teorema del differenziale totale (con dimostrazione). Sviluppi di Taylor al primo ordine. Teorema di Fermat (con dimostrazione). Derivate parziali di ordine 2 o superiore. Teorema di Schwartz (senza dimostrazione). Hessiano di una funzione. Lemma di Morse (senza dim.) e classificazione dei punti critici. Rapporto tra punti critici e punti estremali. Sviluppi di Taylor al secondo ordine, concavità e convessità di una funzione di più variabili.

Funzioni a valori vettoriali. Continuità e differenziabilità per funzioni a valori vettoriali, Matrice Jacobiana. Differenziale di funzione composta. Regola di derivazione a catena (chain rule). Cenni di teoria delle curve: sostegno di una curva, curve chiuse, semplici, regolari. Derivata di una funzione lungo una curva. Curve speciali: cardioide ed astroide. Definizione di superficie parametrica. Piano tangente e vettore normale. Parametrazioni di grafici di funzioni di due variabili e di superfici di rotazione. Teorema del Dini o di funzione implicita in due variabili (con dimostrazione).

Studio di massimi e minimi vincolati. Varianti del teorema di Weierstrass su insiemi non compatti. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in due variabili (con dimostrazione) Applicazione all'economia: il prezzo ombra. Teorema del Dini e teorema dei moltiplicatori di Lagrange: caso generale (senza dimostrazione).

Calcolo integrale Prime proprietà dell'integrale. Misura di Peano e insiemi misurabili. Teorema: le funzioni continue e limitate definite su un insieme misurabile e limitato sono integrabili (senza dimostrazione). Insiemi semplici. Integrali doppi su insiemi semplici. Proprietà degli integrali: monotonia e linearità rispetto all'integrando, additività e monotonia rispetto al dominio. Teorema della media (senza dim). Teorema di derivazione sotto il segno di integrale (senza dim). Integrali tripli: integrazione per strati e per fili. Volume dei solidi di rotazione. Cambi di variabile e invertibilità locale e globale di funzioni. Teorema di invertibilità locale (senza dimostrazione). Coordinate polari, cilindriche, sferiche. Cambio di variabile negli integrali doppi e tripli.

Lunghezza di una curva. Invarianza della lunghezza per cambio di parametrizzazione. Definizione di area di una superficie. Teorema: l'integrale di superficie non dipende dalla parametrizzazione. Area di una superficie parametrizzata come grafico. Definizione di integrale di superficie. Teorema: l'integrale di superficie non dipende dalla parametrizzazione. Area di una superficie di rotazione. Rapporto tra integrali di superficie e integrale di Riemann.

Campi vettoriali Definizione di campo vettoriale e di lavoro di un campo vettoriale lungo un cammino. Campi conservativi e potenziale di un campo. Operatori differenziali su campi di vettori: rotore e divergenza. Campi irrotazionali. Teorema: un campo conservativo è irrotazionale. Richiami di topologia: insiemi connessi e semplicemente connessi, stellati, contrattili. Campi irrotazionali su insiemi semplicemente connessi. Ricerca dei

potenziali per un campo vettoriale. Criteri per capire se un campo irrotazionale è anche conservativo. Teorema di Gauss Green. Dimostrazione del teorema in un caso semplice. Superfici orientabili e orientazione di una superficie e del suo bordo. Teorema di Stokes (senza dimostrazione) Rapporto tra teorema di Stokes e teorema di Gauss-Green. Flusso di un campo attraverso una superficie. Teorema della divergenza o di Gauss. Dimostrazione del teorema in un caso semplice.

4 Libri consigliati

Il corso è standard, quindi qualsiasi libro di Analisi II dovrebbe andare bene. Si segnalano comunque i seguenti libri di testo (in particolare il libro di Bramanti Pagani Salsa)

- Bramanti, Pagani, Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli
- Pagani, Salsa, *Analisi Matematica 2*, Zanichelli
- Barutello, Conti, Ferrario, Terracini, Verzini, *Analisi Matematica vol. 2*, Apogeo
- Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri
- Prodi, *Lezioni di Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri